

# Von Newton bis Schrödinger: Bewegung in der Physik



Dietrich Einzel

Walther-Meißner-Institut für Tieftemperaturforschung

Bayerische Akademie der Wissenschaften

D-85748 Garching

## Übersicht

- Skalen, mathematisches Handwerkszeug
- **Bewegung** in der Astrophysik
- **Bewegung** in der Mechanik (Schulphysik!)
- **Bewegung** von Metall-Elektronen
- **Bewegung** von Gasen und Flüssigkeiten: **Hydrodynamik**
- **Bewegung** von Kondensaten: **Quanten-Hydrodynamik**  
Supraleitung und Suprafluidität

# Zeitskalen



1 Sekunde (s)

1 Tag (d) = 24 Stunden (h)

1 Jahr (a) = 365 Tage

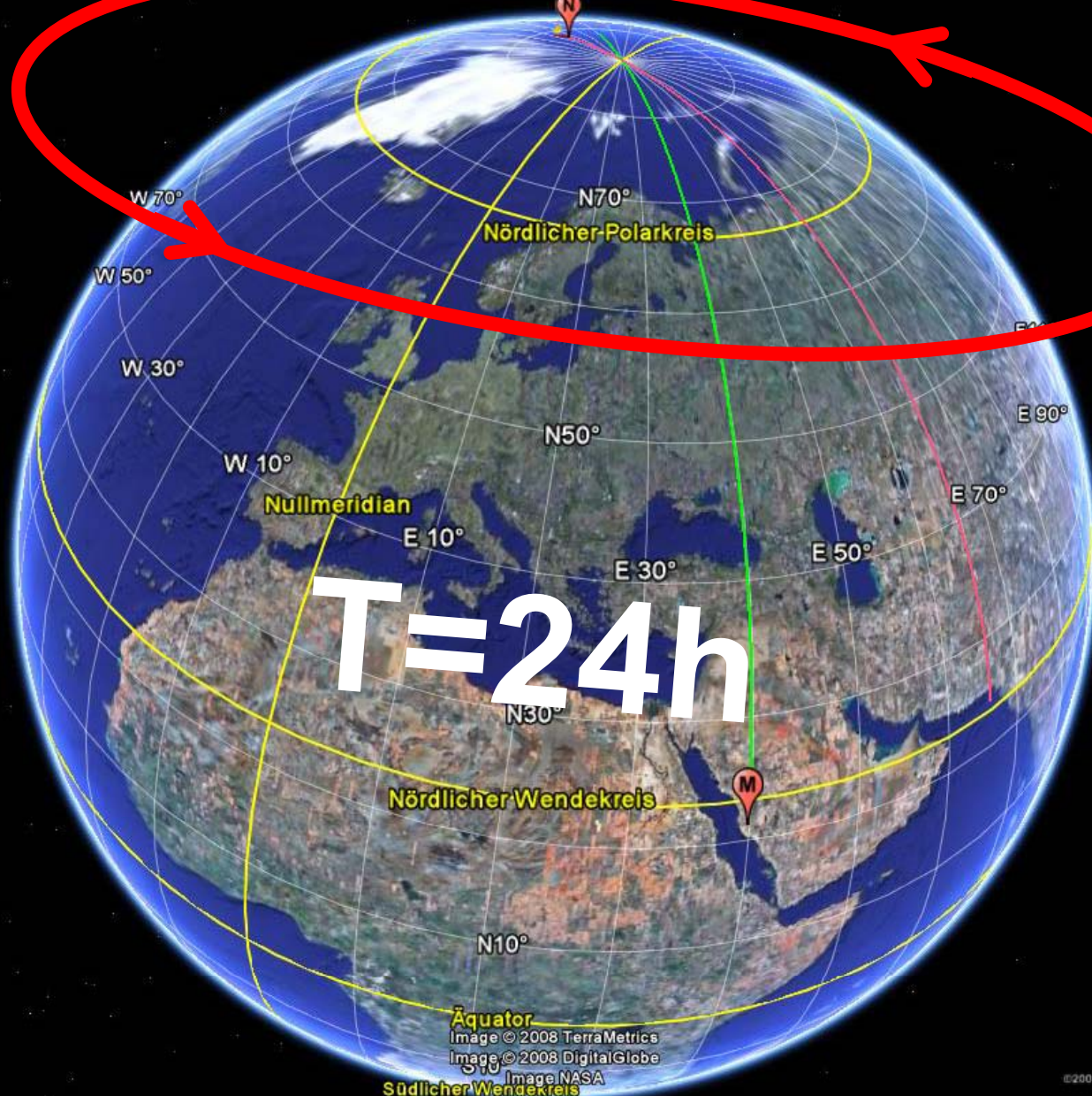
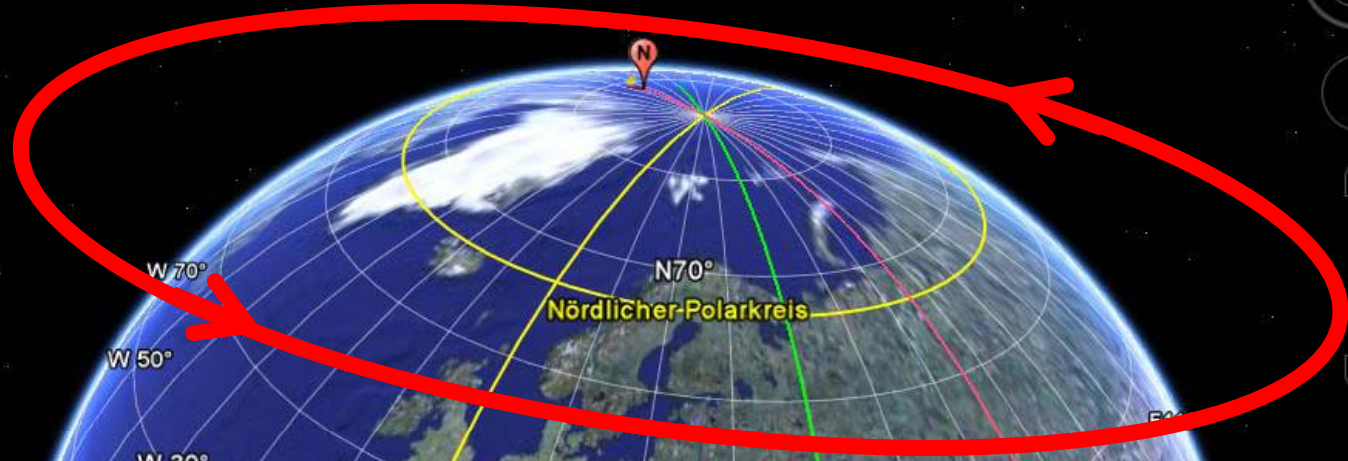
Alter der Menschheit  $T_{HS} = 100\,000$  Jahre

1 galaktisches Jahr  $1\text{ GJ} = 225$  Millionen Jahre

Alter Sonnensystem:  $T_{SS} = 4,60$  Milliarden Jahre = 20 GJ

Alter Milchstraße:  $T_{MS} = 13,50$  Milliarden Jahre = 60 GJ

Alter Universums:  $T_U = 13,75$  Milliarden Jahre = 61 GJ



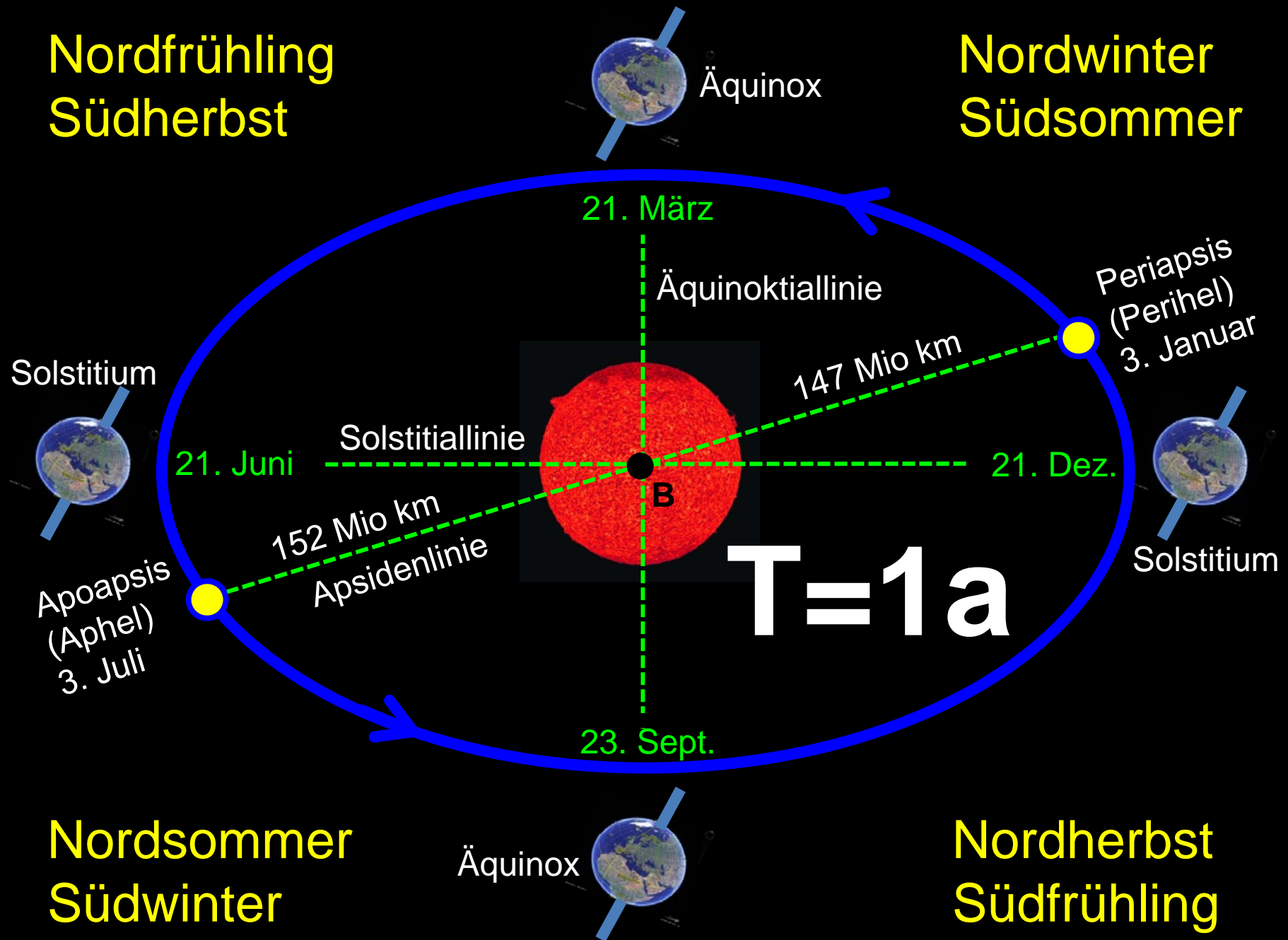
T=24h

Äquator  
Image © 2008 TerraMetrics  
Image © 2008 DigitalGlobe  
Image NASA  
Südlicher Wendekreis



Nordfrühling  
Südherbst

Nordwinter  
Südsommer



Nordsommer  
Südwinter

Nordherbst  
Südfrühling

# T=1GJ

Sonnensystem

28 000 LJ

# =225 Mio a

# Längenskalen



1 Meter (m)

1 Kilometer

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

1 astronomische Einheit

$$1 \text{ AU} = 149,6 \text{ Mio. km (Erde - Sonne)}$$

1 Lichtsekunde

$$1 \text{ LS} = 299\,792,458 \text{ km} = (1/500) \text{ AU}$$

1 Lichtjahr

$$1 \text{ LJ} = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km} = 63\,240 \text{ AU}$$

Abstand Erde - Mond

$$r_{\text{E-M}} = 1,3 \text{ LS} = 384\,400 \text{ km}$$

Abstand SS – Zentrum Milchstraße

$$r_{\text{SS-SL}} = 28\,000 \text{ LJ}$$

Ausdehnung der Milchstraße

$$d_{\text{MS}} = 100\,000 \text{ LJ}$$

# Geschwindigkeitsskalen



$$1 \text{ km/h} = 0,27 \text{ m/s} \quad 1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$$

Usain Bolt	$v_{UB} = 37 \text{ km/h}$
Fußball (Robben)	$v_F = 70 \text{ km/h}$
Gepard	$v_G = 110 \text{ km/h}$
Wanderfalke	$v_{WF} = 300 \text{ km/h}$
Auto	$v_A = 1227 \text{ km/h}$
Schall (Luft)	$v_S = 1234 \text{ km/h}$
Strahlflugzeug	$v_{SF} = 3529 \text{ km/h}$

**Licht (Vakuum)**

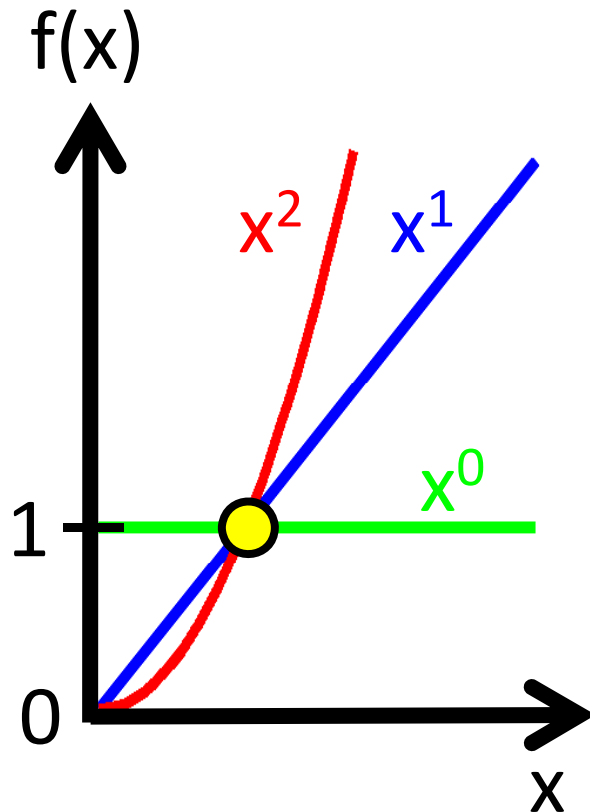
$$c = 299\,792,458 \text{ km/s}$$

$$\text{Umlaufgeschwindigkeit SS – Zentrum MS} \quad v_{SS-MS} = 267 \text{ km/s}$$

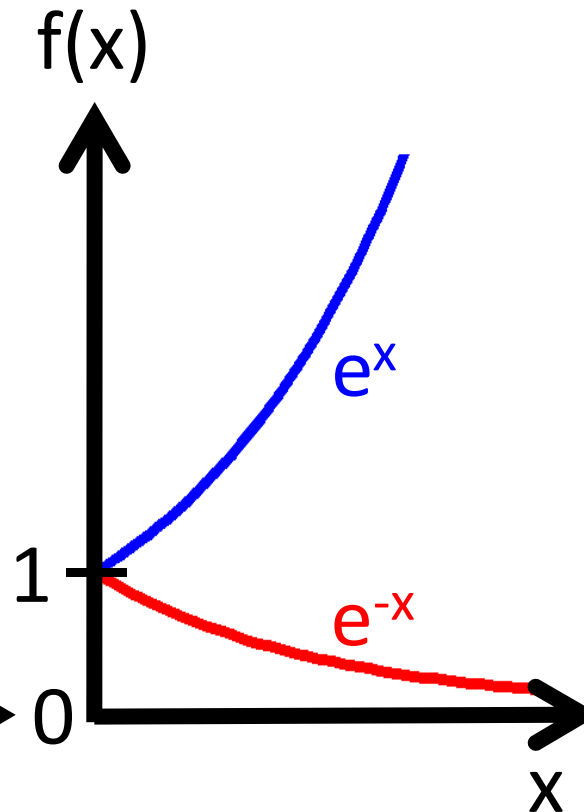
$$\text{Umlaufgeschwindigkeit Erde – Sonne} \quad v_{ES} = 30 \text{ km/s}$$

$$\text{Umlaufgeschwindigkeit Mond – Erde} \quad v_{ME} = 1,023 \text{ km/s}$$

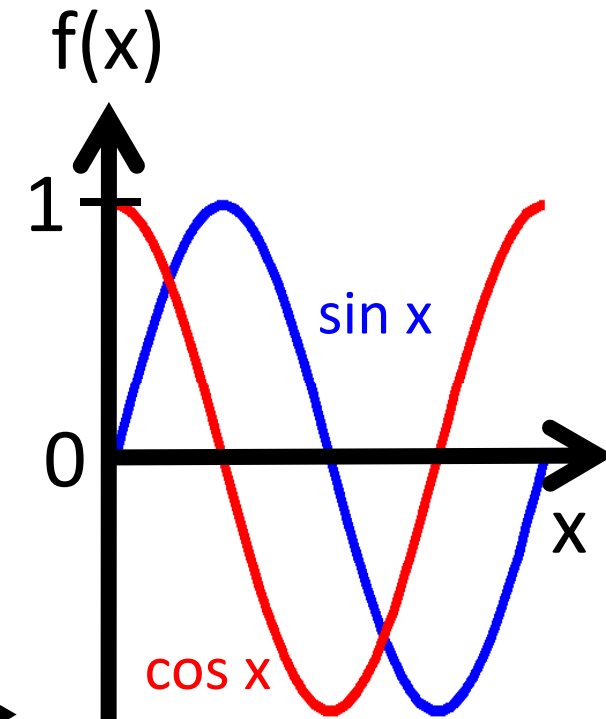
# Mathematisches Handwerkszeug: Funktionen



Potenz-  
Funktion

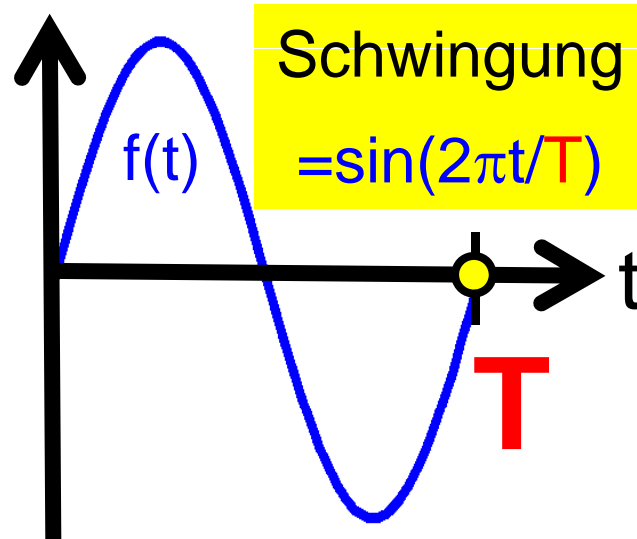
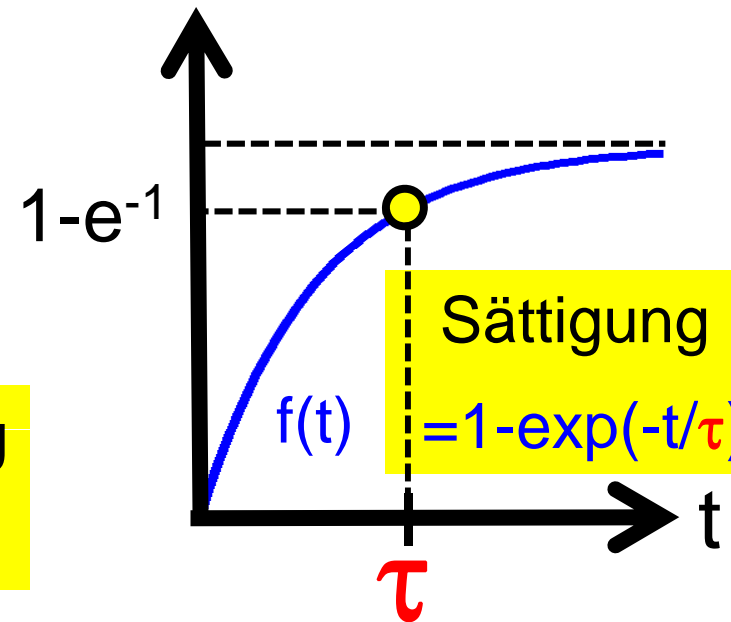
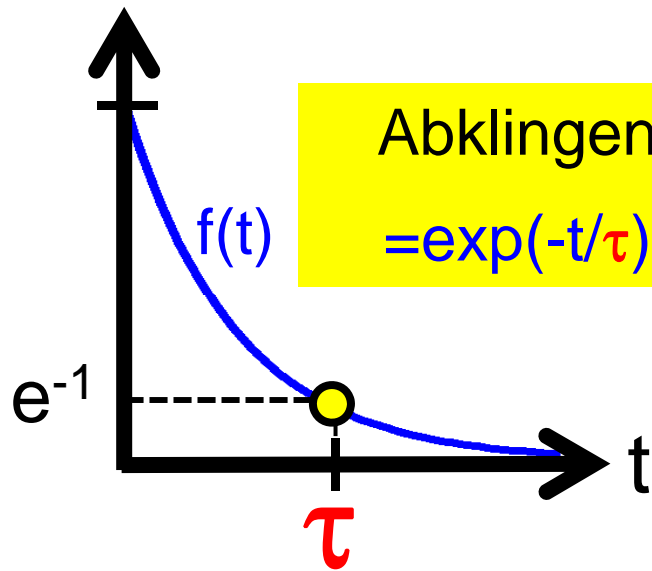


Exponential-  
Funktion

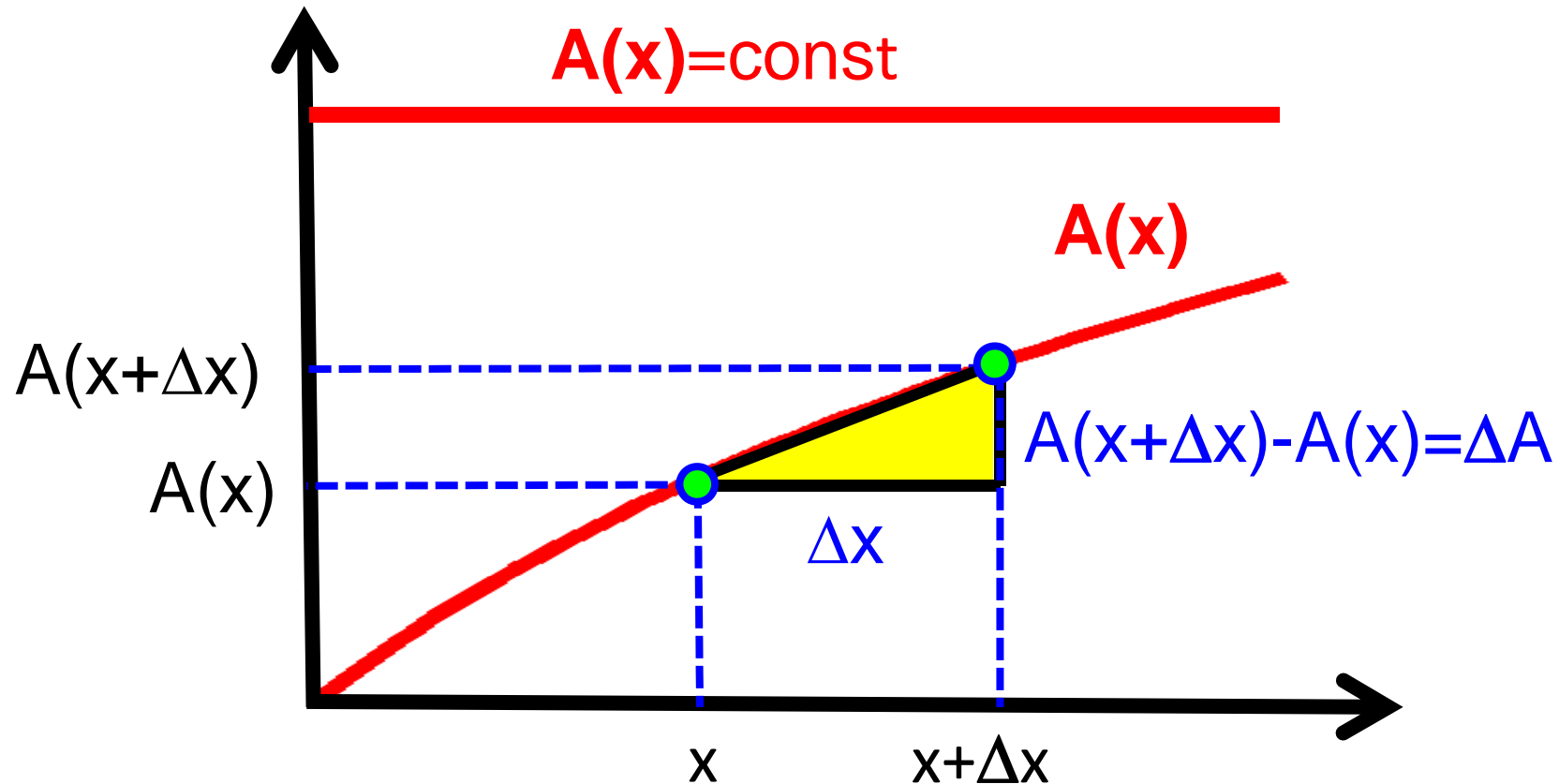


Periodische  
Funktion

# Mathematisches Handwerkszeug: Zeitskalen $\tau$ , $T$



# Mathematisches Handwerkszeug: Differentiation



Änderung  
(Steigung)

$$A'(x) = \frac{dA(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}$$

Zweites Newtonsches Axiom

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{F}/m$$

Beschleunigung                      Kraft

Kräftefreie Bewegung:  $\mathbf{F} = 0$

Beschleunigung  $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = 0$

Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0$

Ort  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$

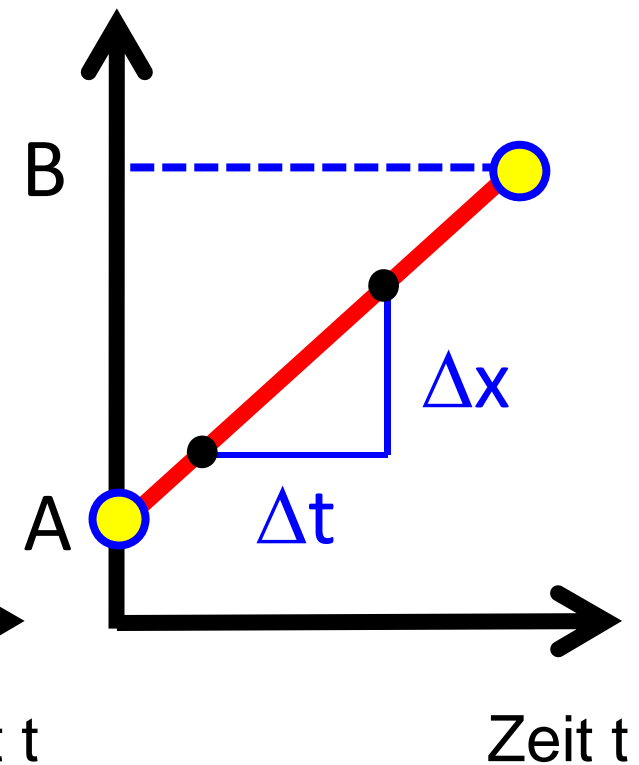
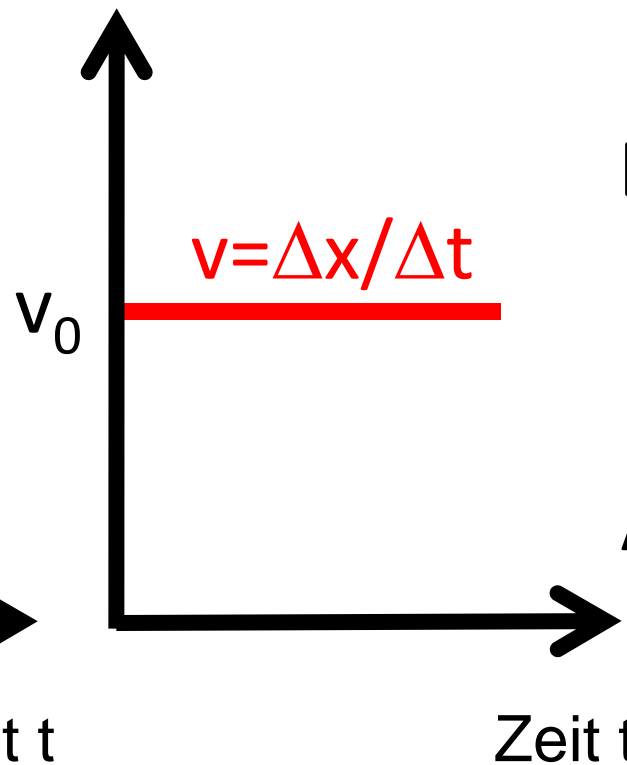
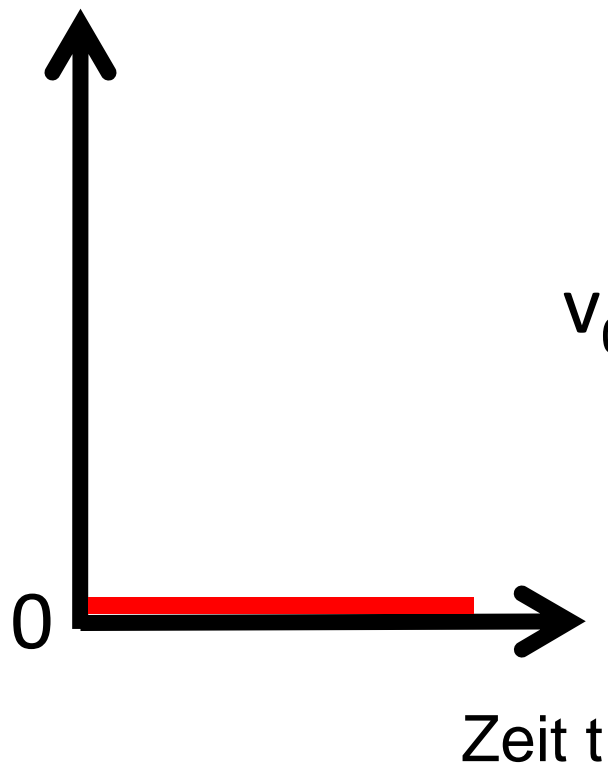
# Zur kräftefreien Bewegung



Beschleunigung  
 $a(t)$

Geschwindigkeit  
 $v(t)$

Ort  
 $x(t)$



# Bewegung im Gravitationsfeld der Erde



Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g} \quad ; \quad \mathbf{g} = -g_E \hat{\mathbf{z}}$$

Ballistische Dynamik

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{g}$$

Beschleunigung

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{g}$$

Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{g} t + \mathbf{v}_0$$

Ort

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$

Ballistische Bewegung: Wurfparabel

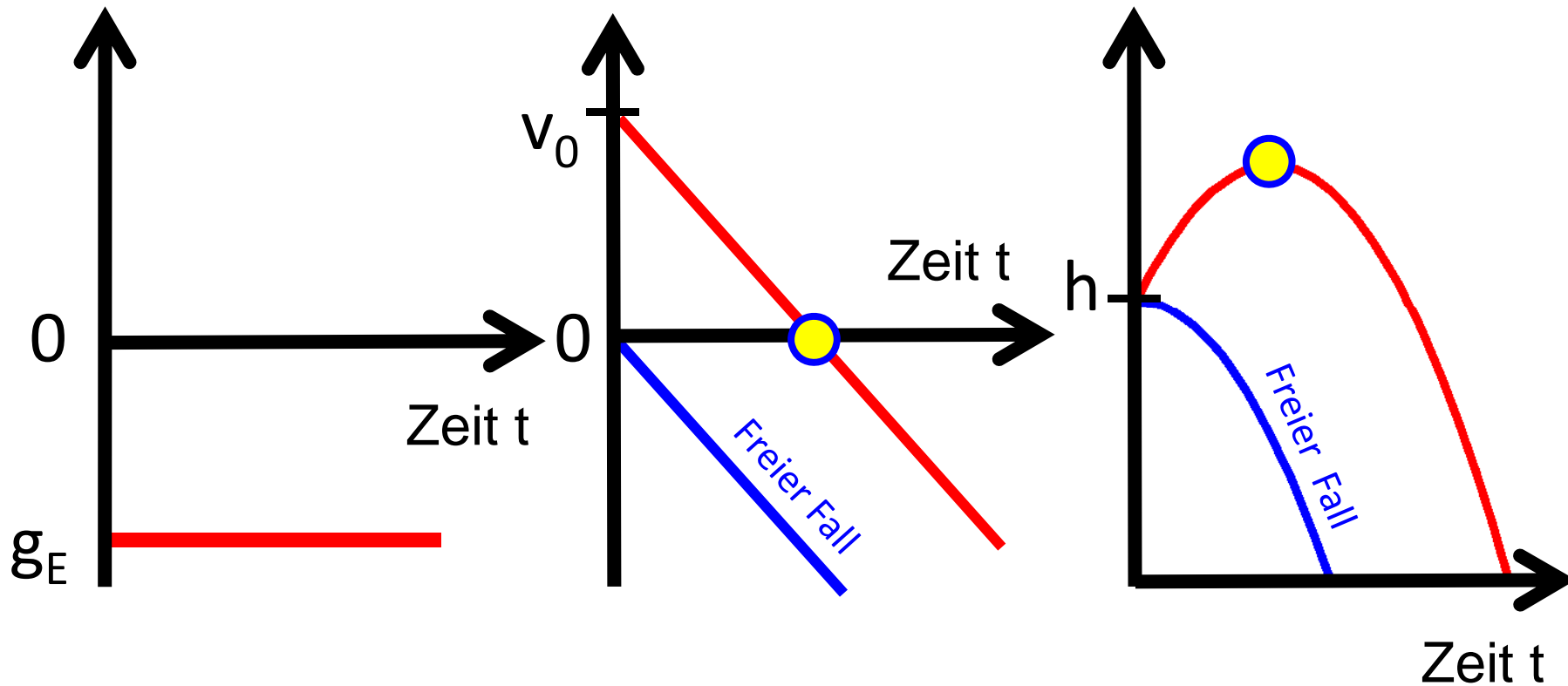
# Bewegung im Gravitationsfeld der Erde



Beschleunigung  
 $a(t)$

Geschwindigkeit  
 $v(t)$

Ort  
 $z(t)$



# Bewegung im Gravitationsfeld der Erde mit Reibung



Gravitationskraft

$$\mathbf{F}_G = m\mathbf{g}$$

Reibungskraft

$$\mathbf{R} = -m \frac{\mathbf{v}(t)}{\tau}$$

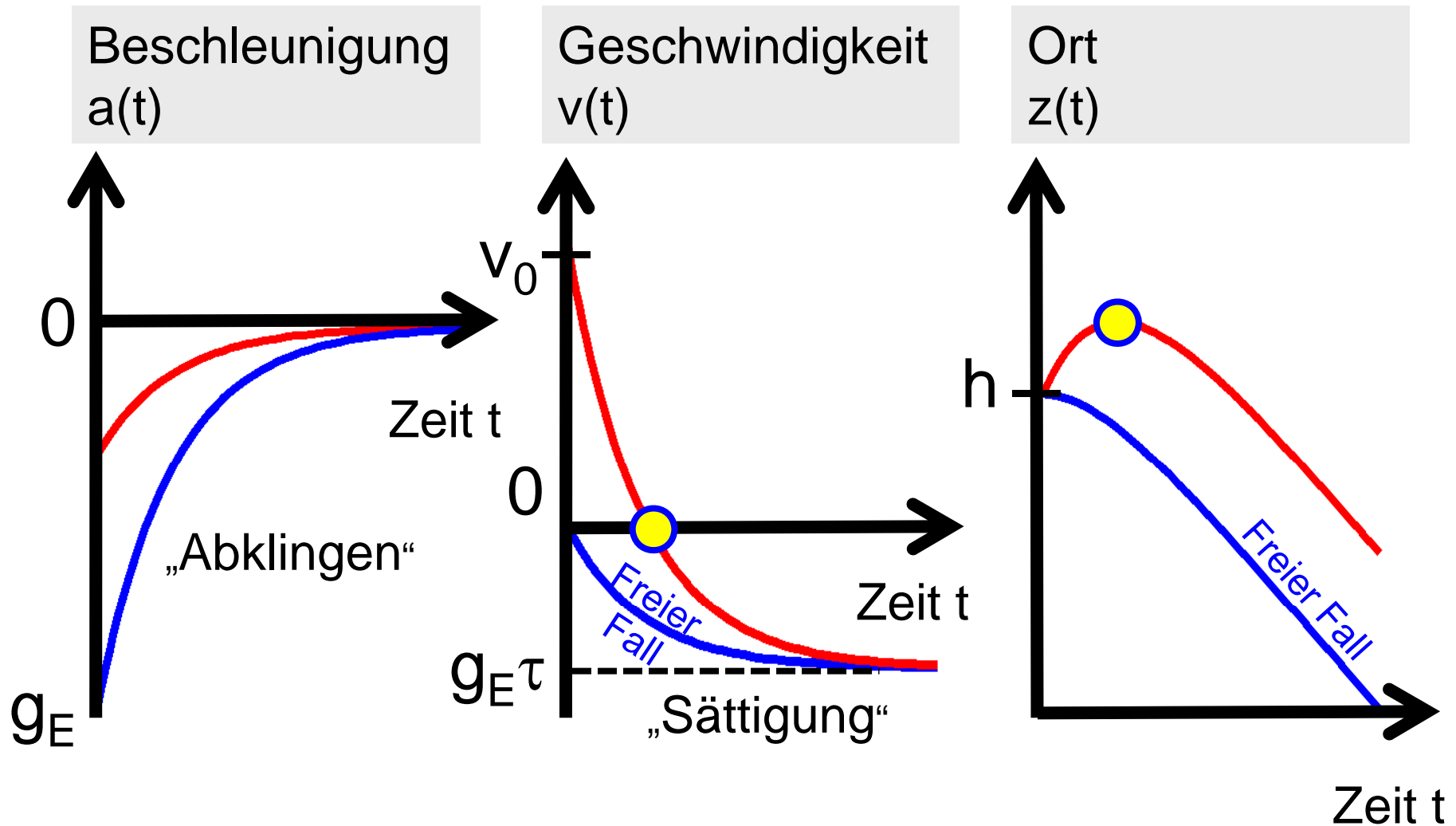
Relaxations-Dynamik

$$m \left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) \mathbf{v}(t) = m\mathbf{g}$$

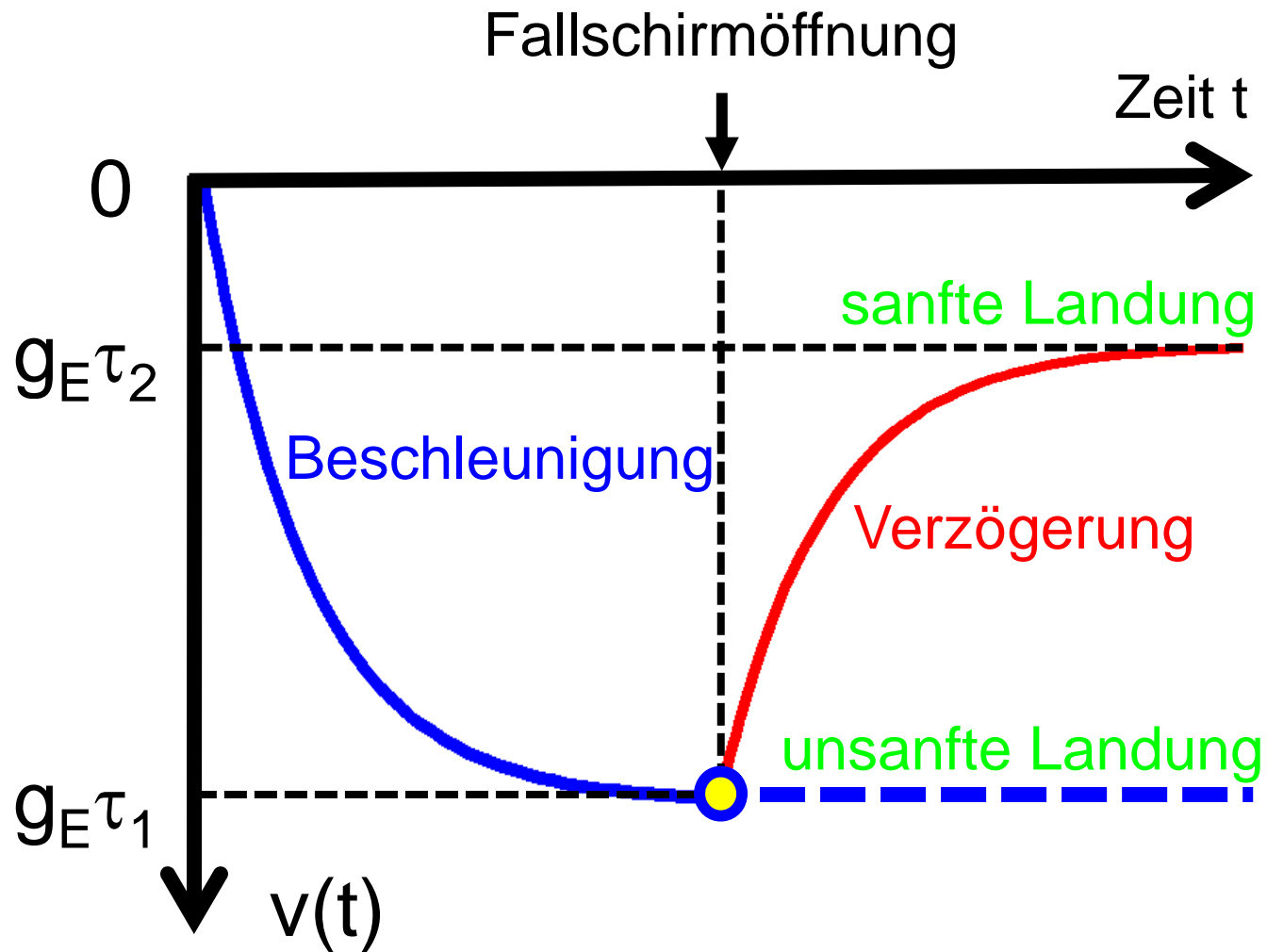
Relaxation der Geschwindigkeit

$$\mathbf{v}(t) = \underbrace{\mathbf{g}\tau}_{\mathbf{v}_\infty} + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{g}\tau) e^{-t/\tau}$$

# Bewegung im Gravitationsfeld der Erde mit Reibung



# Geschwindigkeitsprofil beim Fallschirmsprung



# Stromrelaxation von Metallelektronen



Elektrische Kraft

$$mg \rightarrow \mathbf{F}_E = e\mathbf{E}$$

Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

Elektronische Stromdichte

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = en\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

Relaxation der Stromdichte (analog freier Fall mit Reibung)

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{g} \tau + (\mathbf{v}_0 - \mathbf{g}\tau) e^{-t/\tau}$$



$$en \langle \mathbf{v}(t) \rangle = en \frac{e\mathbf{E}}{m} \tau + (\mathbf{j}_{e0} - \sigma \mathbf{E}) e^{-t/\tau}$$

# Stromrelaxation von Metallelektronen



Elektrische Kraft

$$mg \rightarrow \mathbf{F}_{\mathbf{E}} = e\mathbf{E}$$

Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v}(t) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

Elektronische Stromdichte

$$\mathbf{j}_e(\mathbf{r}, t) = en\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

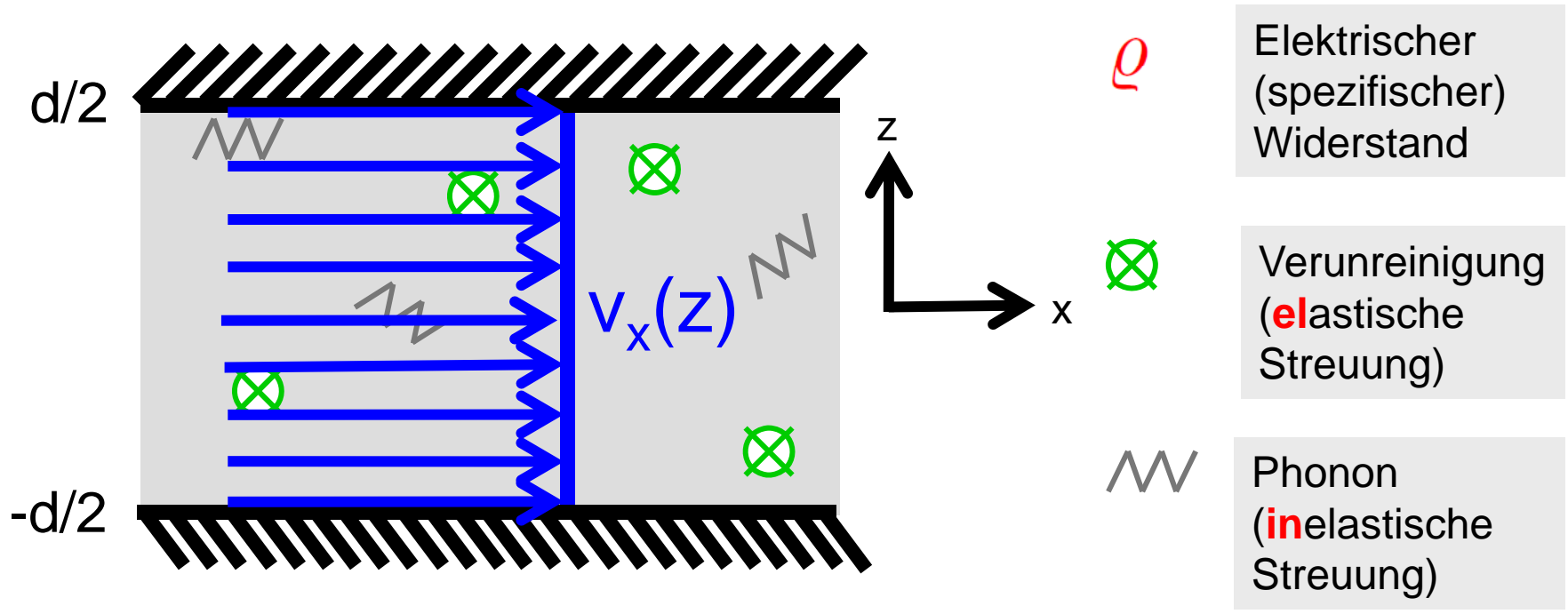
Relaxation der Stromdichte (analog freier Fall mit Reibung)

$$en \langle \mathbf{v}(t) \rangle = \underbrace{en \frac{e\mathbf{E}}{m} \tau}_{\frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}} + (\mathbf{j}_{e0} - \sigma \mathbf{E}) e^{-t/\tau}$$

# Stromrelaxation von Metallelektronen



$$en \langle v_x \rangle = \frac{ne^2\tau}{m} E_x = \frac{E_x}{\rho} ; \rho = \rho_{el} + \rho_{in}$$



Elektronen-Strömung:  
**Drude- (Ohm-) Gesetz**

**Supraleitung:  $\rho = 0!$**

Treibende Kraft ( $\rho$  = Massendichte):  $F_x = -\frac{m}{\rho} \frac{dP}{dx}$

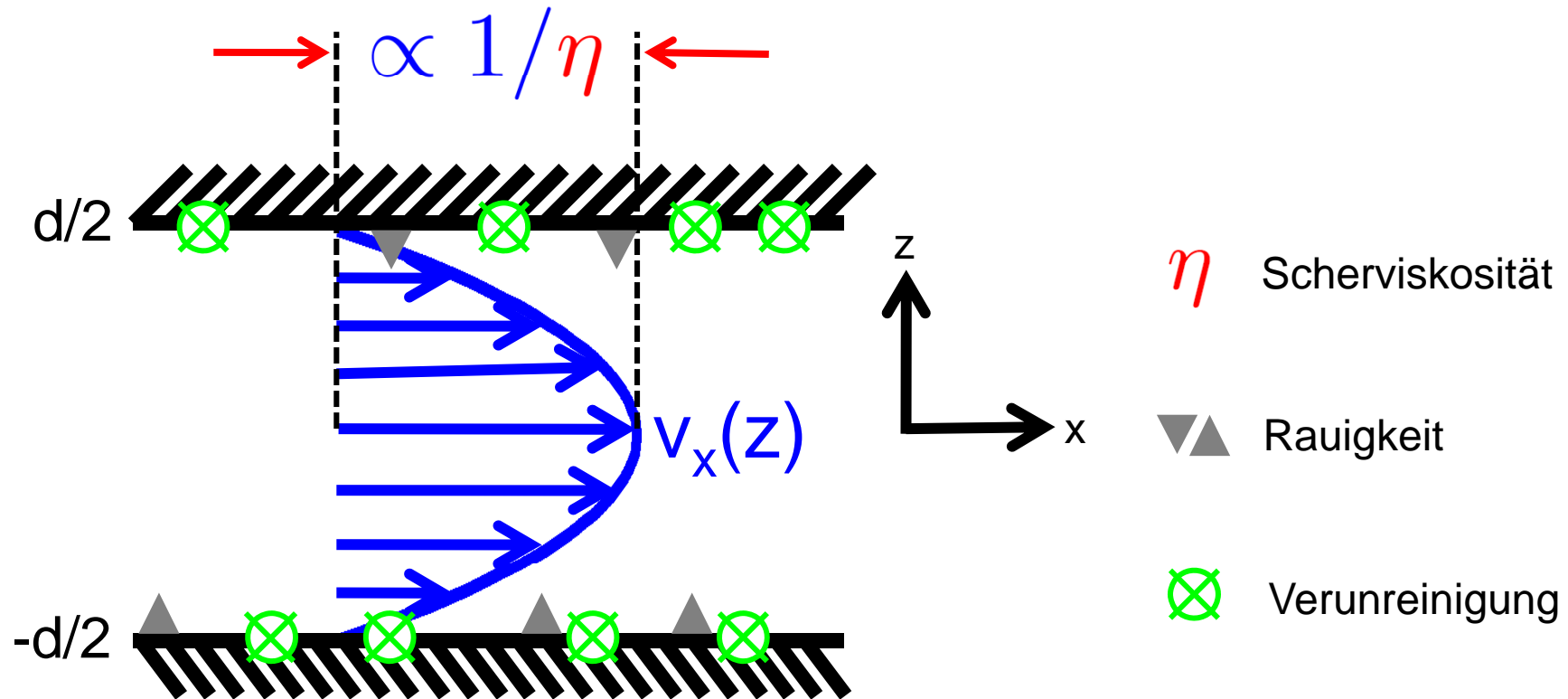
Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(t) \rightarrow v_x(z, t)$

Flüssigkeits-Dynamik  $\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \overset{=0}{\nearrow} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_x(z, t) = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}$

Stationäre Flüssigkeitsströmung (parallele Platten)  
(Hagen-Poiseuille-Strömung)

$$v_x(z) = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{d^2}{4} - z^2 \right) \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \right) ; \langle v_x \rangle = \frac{d^2}{12\eta} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

# Zur Bewegung von Gasen und Flüssigkeiten



Flüssigkeits-Strömung:  
**Hagen-Poiseuille-Gesetz**

**Suprafluidität:  $\eta=0$**

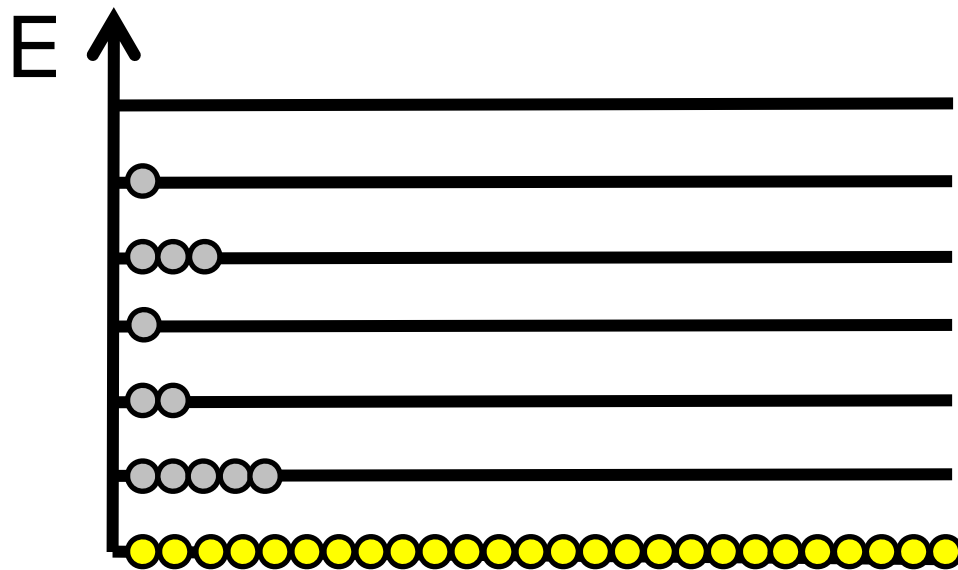
## Voraussetzungen für die Suprafluidität

Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen

leichte Atome (keine Verfestigung bei  $T \rightarrow 0$ )

Bose-Statistik (Spin-0): makroskopische Besetzung ( $E=0$ )

$\Rightarrow$  flüssiges  $^4\text{He}$  unterhalb  $T_\lambda=2,17$  K, atomare Gase  $^6\text{Li}$ , ...



Bose-Einstein-  
Kondensation

$$N \rightarrow \infty$$

## Voraussetzungen für die Supraleitung:

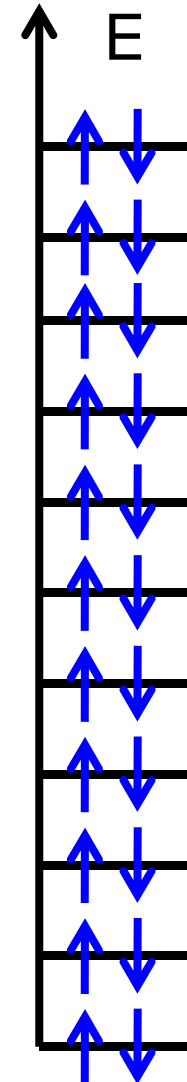
Metalle bei tiefen Temperaturen

Elektronen gehorchen **Fermi-Dirac**-Statistik (Spin- $\frac{1}{2}$ )

Formation von Elektronen-Paaren (Cooper)

⇒ **Quasi-Bosonen** mit Gesamtspin  $s=0$  → 

Niedrig- $T_c$ : einige K, Hoch- $T_c$ : um 100 K



\* John Bardeen, Leon Cooper & Robert Schrieffer, 1957

# Supraleitung und Suprafluidität



Beschleunigungsgleichung der Supraleitung (London, 1935)

$$\left( \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau} \right) v_x^s = e \underbrace{\left( -\frac{\partial U}{\partial x} \right)}_{E_x}$$

**Supraleitung?**

Beschleunigungsgleichung der Suprafluidität (London, 1950)

$$\left( \frac{d}{dt} - \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v_x^s = \frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

**Suprafluidität?**

# Bewegung von Bose- und Paarkondensaten



Bose-Einstein-Kondensate (Supraflüssigkeiten):  $k=1$   
Paar-Kondensate (Supraleiter):  $k=2$

Kondensat-Wellenfunktion  $\Psi(x, t) = a(x, t)e^{i\varphi(x, t)}$

Kondensat-Dichte  $n^s(x, t) = k|\Psi(x, t)|^2$

**Schrödinger-Gleichung\***  $\Rightarrow$  **Quanten-Hydrodynamik**

Kondensat-Strom  $j_{ex}^s(x, t) = en^s v_x^s(x, t)$

Kondensat-Geschwindigkeit  $v_x^s(x, t) = \frac{\hbar}{km} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$

\* Erwin Schrödinger, 1926, Erwin Madelung, 1926

**Quanten-Hydrodynamik: Schrödinger-Gleichung** für  $\Psi$   
liefert Beschleunigungs-Gleichungen für  $v_x^S$ :

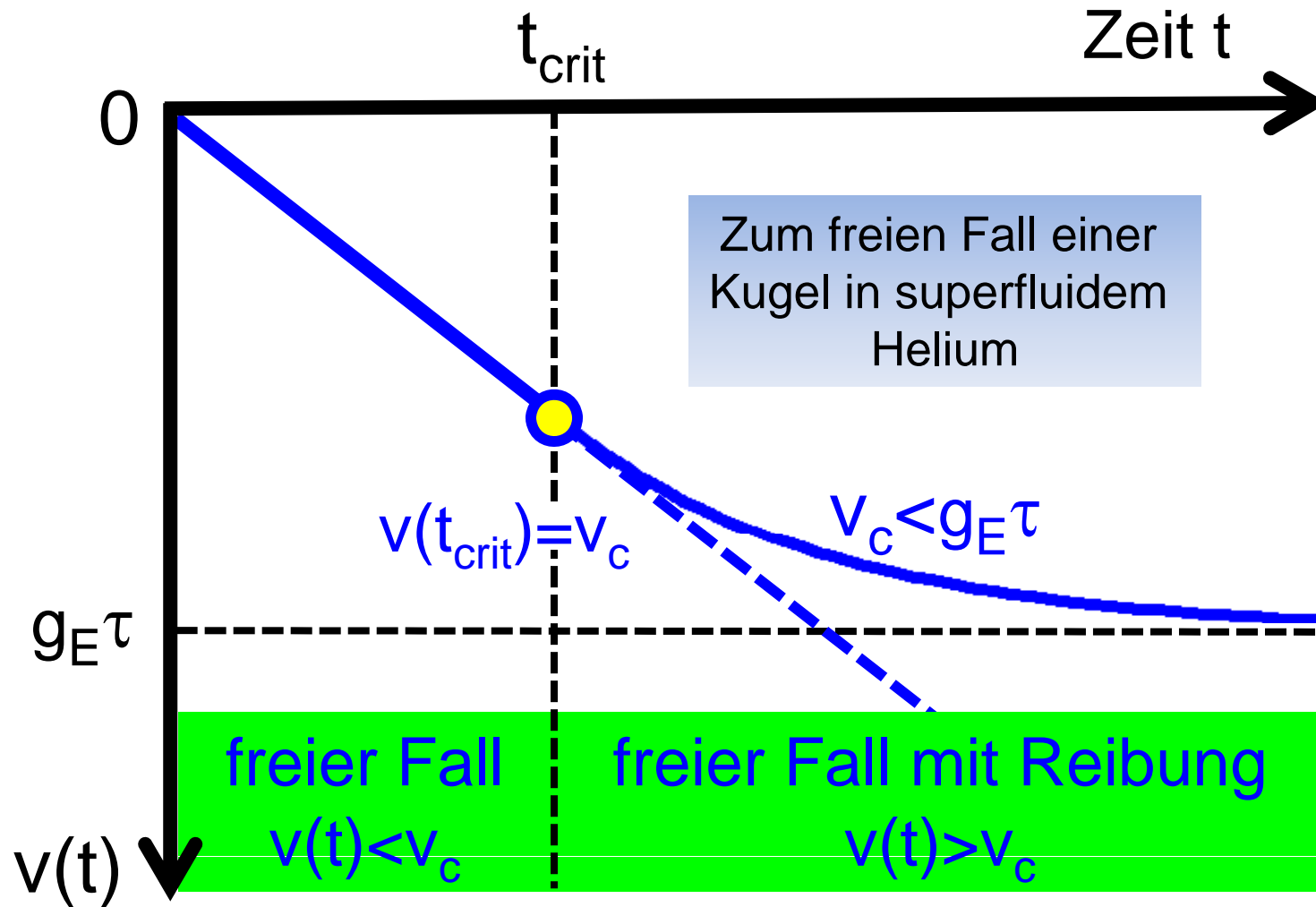
$$m \frac{dv_x^S}{dt} = F_x = -e \frac{\partial U}{\partial x}$$

⇒ Dissipationsfreie Beschleunigung des  
Paarkondensats (**London**):  $\rho \propto 1/\tau = 0$

$$m \frac{dv_x^S}{dt} = F_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

⇒ Dissipationsfreie Beschleunigung des  
Bose-Einstein-Kondensats (**Euler**):  $\eta = 0$

# Zur Bewegung von Supraflüssigkeiten



## Ausgewählte Aspekte zur **Bewegung in der Physik...**

Zeit-, Längen und **Geschwindigkeitsskalen**,

Mathematische Hilfsmittel

Kräftefreie **Bewegung**

Schiefer **Wurf** ohne und mit Reibung, Fallschirmsprung

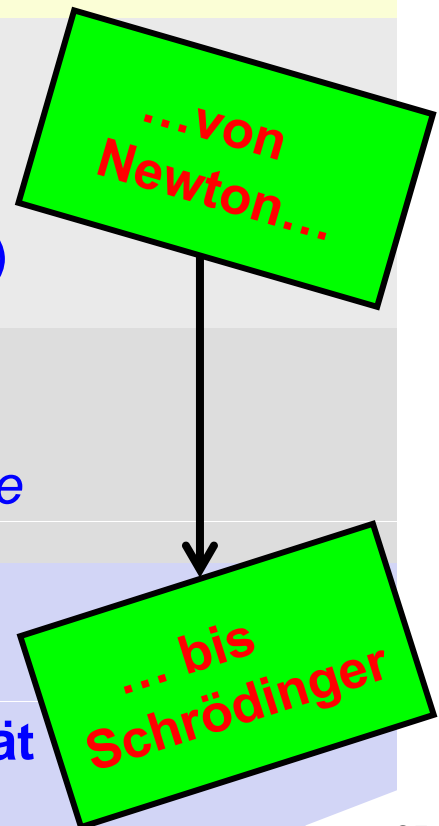
**Schwingungen** (mechanisch, elektronisch, (un-)gedämpft)

**Bewegung** elektrischer Ströme in Metallen: *Drude*

**Bewegung** von Flüssigkeiten und Gasen: *Hagen-Poiseuille*

Tiefe Temperaturen: Bose- und Fermi-Paar-**Kondensation**

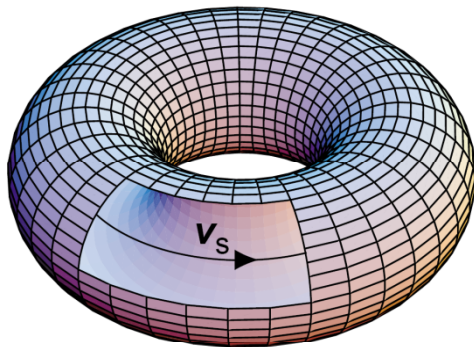
Quanten-**Hydrodynamik**: **Supraleitung** und **Suprafluidität**



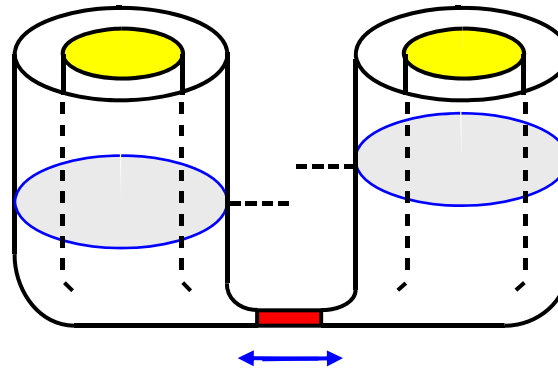
# Appendix: Zur Bewegung von Supraflüssigkeiten



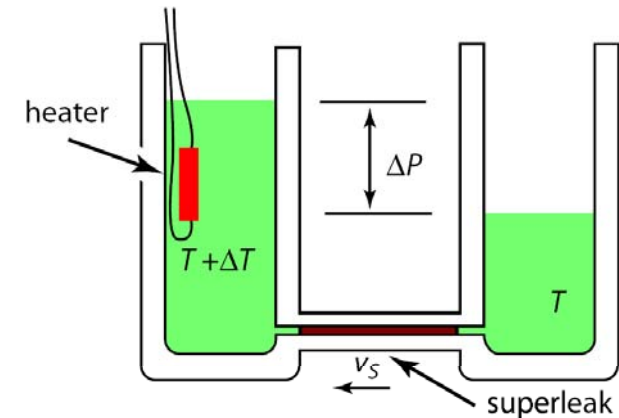
Dauerströme



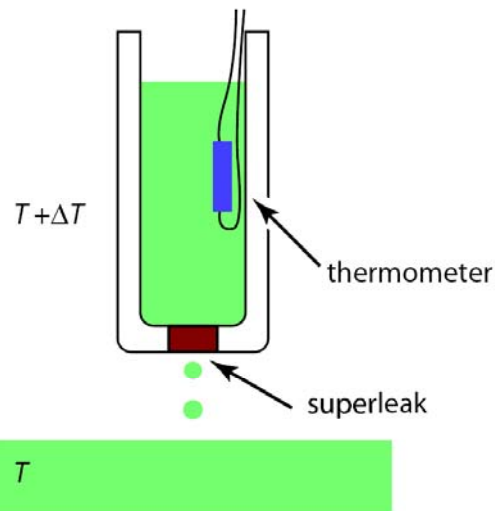
U-Rohr-Schwingungen



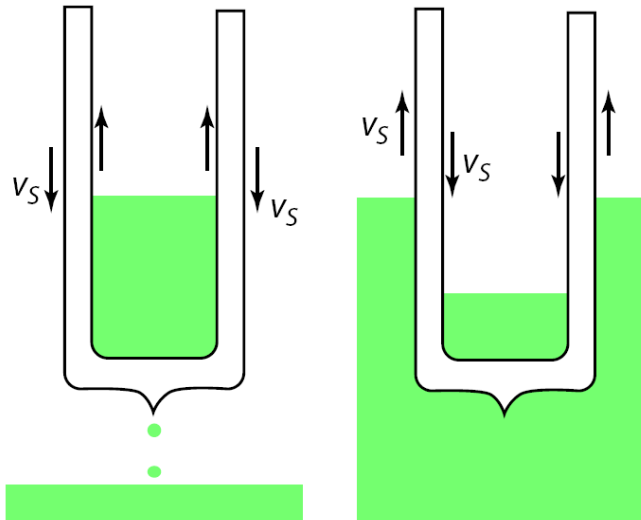
Thermomech. Effekt



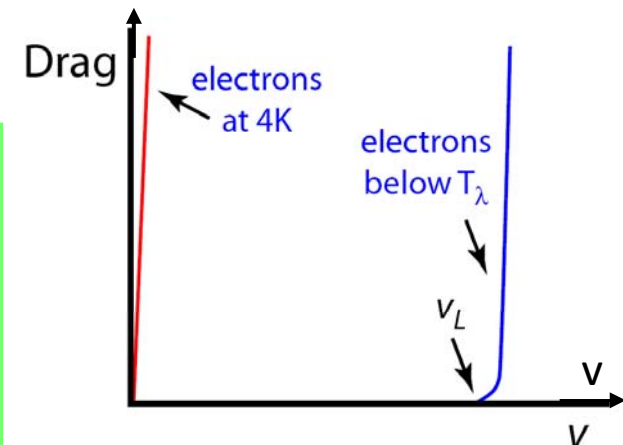
Superleck



Becherglas-Experiment



Krit. Geschwindigkeit



Source: Dr. D. I. Bradley, Lancaster Univ., UK

# Appendix: Faszinosum Supraleitung



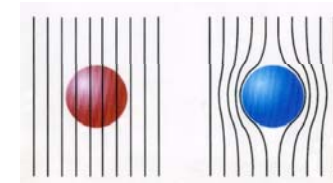
## Makroskopische Phasenkohärenz

F & H London 1935, 1950,  
Ginzburg & Landau, 1950, BCS 1957, ...

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}$$

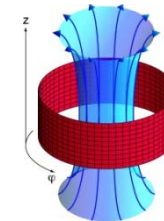
## Perfekter Diamagnetismus

W. Meißner & R. Ochsenfeld 1933



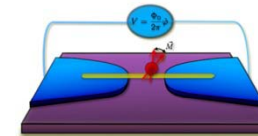
## Fluxoid-Quantisierung (50 Jahre!)

R. Doll & M. Näbauer, B. Deaver, W. Fairbank, 1961



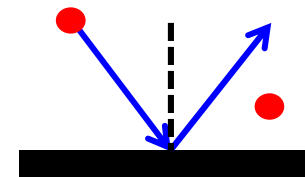
## Josephson-Effekt

B. Josephson, 1962



## Ballistische Bogoliubov-Valatin-Quasiteilchen

Bogoliubov & Valatin 1957, D. Einzel & Parpia, 1987, ...



## Mechanik

Gravitation, ballistische Bewegung, Planetenbewegung, Schwingungen, Kreisbewegung, starrer Körper, Kreiselbewegung, chaotische Bewegung, ...

## Elektrodynamik

Induktion, Schwingkreise, elektromagnetische Wellen, Photonen, Strahlungsphänomene,...

## Elementarteilchen

Bewegung in äußeren Feldern, Tunneln, Teilchenbeschleuniger, relativistische Bewegung,...

## Gase, Flüssigkeiten

Potentialströmung, Couette-, Hagen-Poiseuille-Strömung, Knudsen-Strömung, Wellenbewegung, Turbulenz, Brownsche Bewegung, Suprafluidität,...

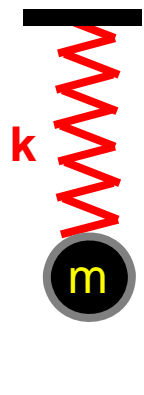
## Metalle

Gitterdynamik, Phononen, elektronische Stromrelaxation, Zyklotron-Bewegung, Larmor-Präzession, Supraleitung, ...

# Appendix: Schwingungen ( $\omega_0 = 2\pi/T$ )

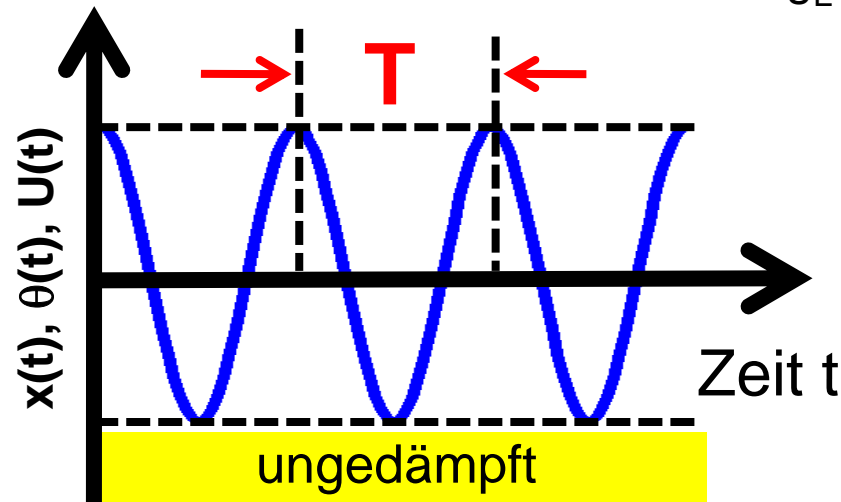


Feder

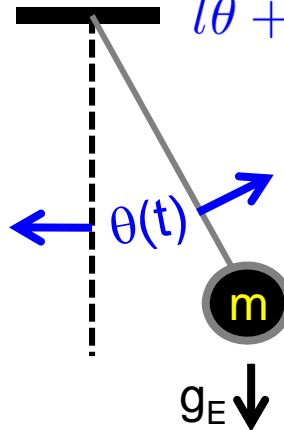


$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

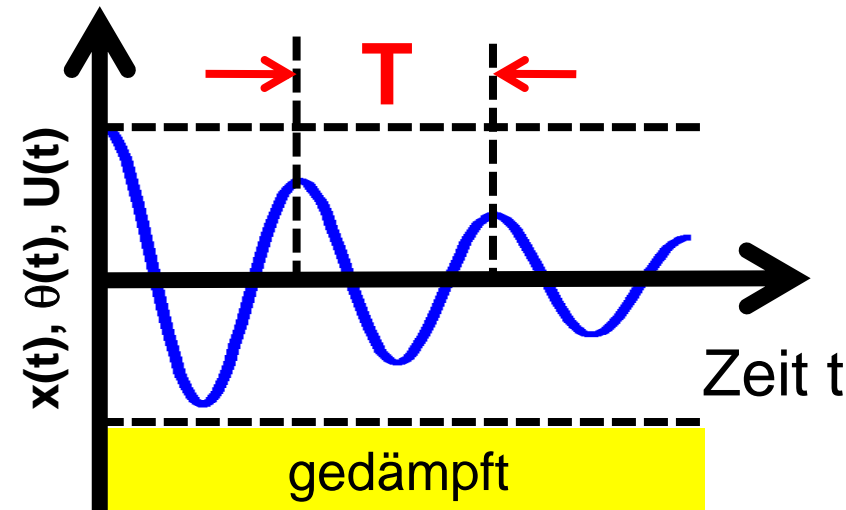


Pendel

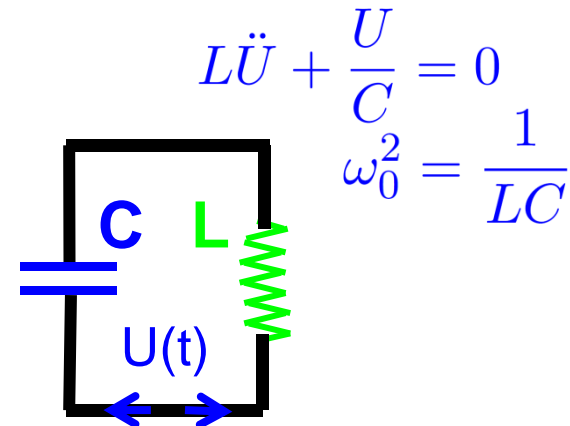


$$l\ddot{\theta} + g_E\theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{g_E}{l}$$



Schwingkreis



$$L\ddot{U} + \frac{U}{C} = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

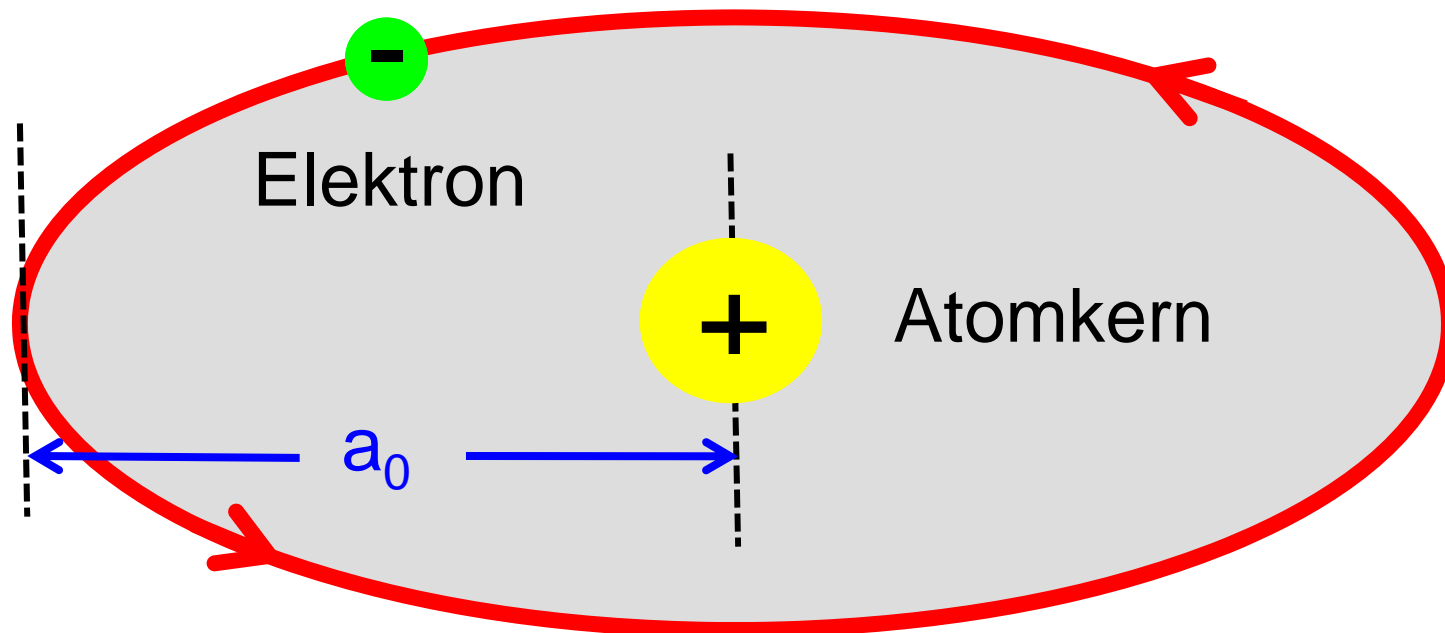
## Appendix: Mikroskopische Längenskalen



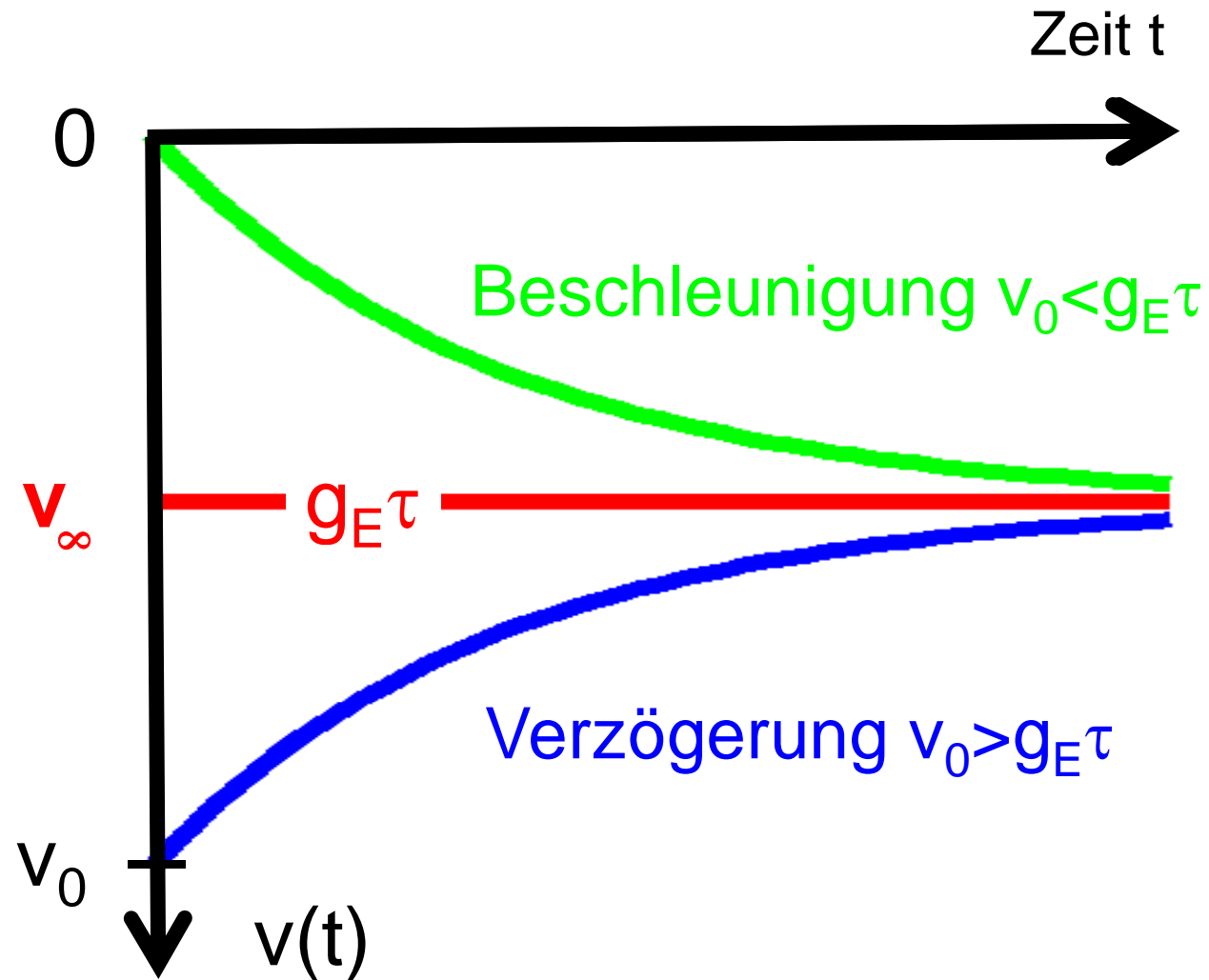
$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{Bohrscher Radius } a_0 = 0,53 \text{ \AA}$$

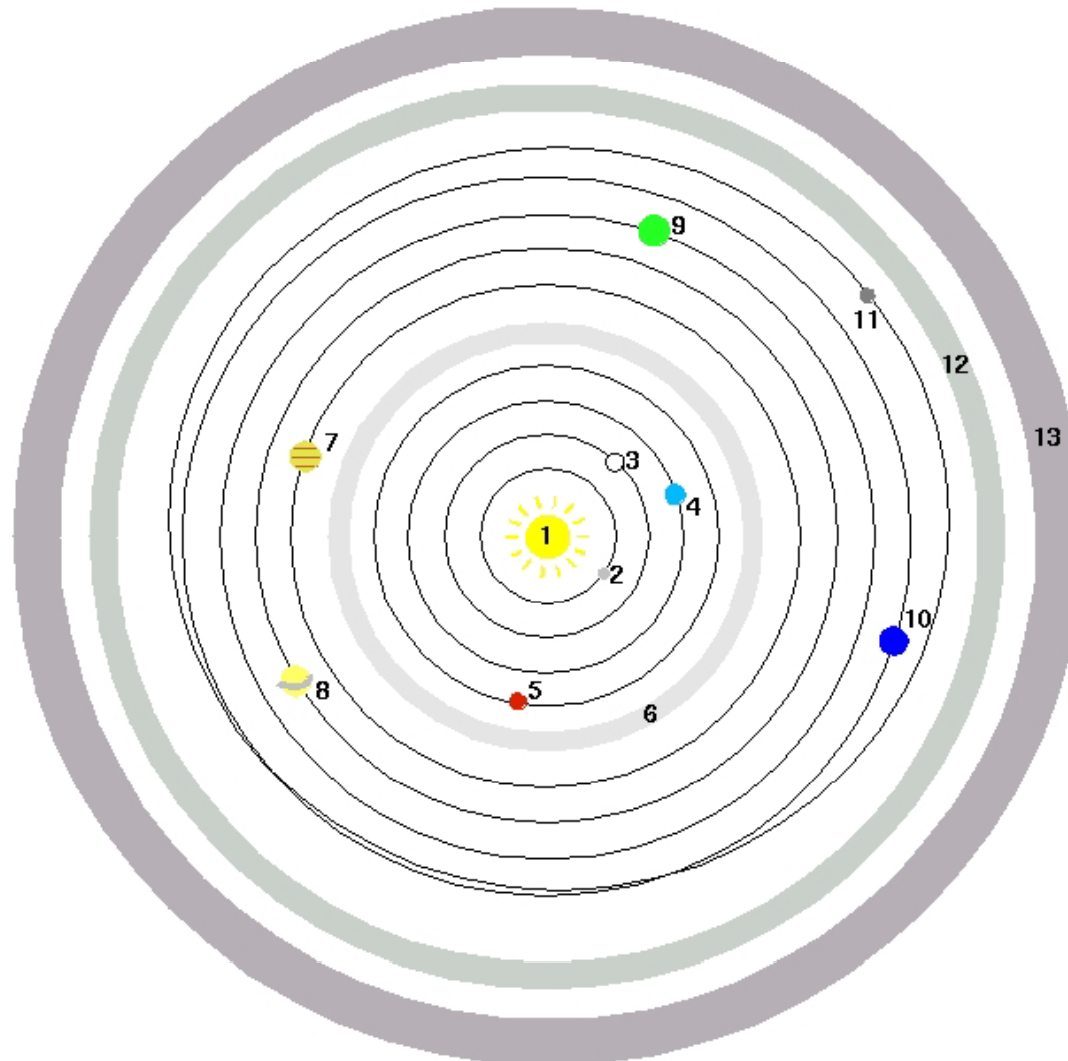
$$\text{Thompson-Radius } r_e = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$



# Appendix: Zur Geschwindigkeitsrelaxation



# Appendix: Unser Sonnensystem



1. Sonne
2. Merkur
3. Venus
4. Erde
5. Mars
6. Asteroidengürtel
7. Jupiter
8. Saturn
9. Uranus
10. Neptun
11. Pluto
12. Kuipergürtel
13. Oortsche Wolke